Tema 1

NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

2. NÚMEROS NATURALES

2.1 Construcción del conjunto N: sistema axiomático

A. Sistema axiomático de Peano

B. El principio de inducción completa y sus consecuencias

C. Operaciones básicas en el conjunto N: suma y producto de números naturales

D. Ordenación en el conjunto N

E. Características del conjunto N

2.2 Construcción del conjunto N: sistema conjuntista

A. Conjuntos y paradojas

B. Cardinales y operaciones

C. Cardinales de conjuntos finitos y números naturales

D. El conjunto N: cardinal, operaciones y orden

E. Los conjuntos finitos y sus propiedades

F. Construcción conjuntista de N

3. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

3.1 Introducción

3.2 Conceptos básicos

3.3 Fundamentación de sistemas de numeración

A. El Teorema Fundamental de la Numeración. Consecuencias

B. Propiedades

C. Cambio de sistema de numeración

4. GUIÓN-RESUMEN

5. BIBLIOGRAFÍA

1. INTRODUCCIÓN

Las más antiguas nociones de número en la raza humana se remontan en el tiempo hasta perderse su rastro. Sin embargo, el desarrollo y aplicación del primitivo concepto es un proceso muy largo en el que se va avanzando de manera lenta e irregular. Parece ser que el elemento determinante en el paso de reconocer, de forma muy primitiva, este concepto es el descubrimiento de que algunos grupos de cosas pueden ponerse en correspondencia biunívoca.

Una vez que la consciencia de número se extiende y se comprende de modo general en las conciencias de los antiguos seres humanos, se observa la necesidad de expresar dicho conocimiento a través de algún tipo de lenguaje simbólico.

Evidentemente, en un principio se usan los dedos de las manos: consecuencia de ello es la actual preponderancia del sistema decimal, que también fue dominante en muchos pueblos primitivos. Del mismo modo, en otros lugares y épocas aparecen sistemas de base 5 (los dedos de una sola mano) y sistemas de base 20 (los dedos de las manos y los pies conjuntamente). El siguiente paso es la utilización de montones de piedras u otros objetos para representar correspondencias con los elementos de otro conjunto. En una etapa posterior, estos montones se sustituyen por muescas en palos, trozos de maderas, huesos... hechos en la mayoría de las ocasiones con sílex.

Aunque no hay constancia de ello, los signos para representar números parecen ser anteriores a la aparición de la palabra escrita. No en vano, es más sencillo hacer muescas sobre una determinada superficie que establecer una frase para describir una cierta realidad concreta.

En cuanto al concepto de número natural, es de capital importancia observar las dos caras que ofrece: una en su aspecto cardinal, y otra en el aspecto ordinal. Ambos son complementarios y mientras el primero se basa en el principio de emparejamiento, el segundo trae consigo el concepto de sucesión.

El concepto de número se consolida y progresa con gran rapidez gracias a la facilidad para identificar estos dos aspectos. El número cardinal, interesante en la vida práctica, es el que acabará creando el cálculo, y el número ordinal ofrece la facilidad para disponer todo tipo de objetos en sucesión. El sistema numérico está basado en los dos principios que se deducen de ambas visiones del concepto de número: el de correspondencia y el de sucesión.

En el conjunto de los números naturales, cualquier elemento se obtiene añadiendo una unidad al elemento que le antecede. Este es el llamado principio de recurrencia, uno de los más importantes en este contexto.

Para obtener una construcción formal del conjunto N de los números naturales, se puede recurrir a dos caminos diferentes, cada uno de ellos relacionado con el aspecto cardinal u ordinal de número.

En un principio, el concepto de número natural se introduce de forma axiomática como hacen Peano y Hilbert. Sin embargo, con el desarrollo de la teoría de clases, el número natural aparece como un concepto derivado; es por este camino por el que se internan otros matemáticos como Cantor, Frege y más adelante Russell.

Fue Frege quien nos legó la actual definición de número cardinal. Para ello tomó como base la teoría de conjuntos de Boole y Cantor y se apoyó en la idea de correspondencia biunívoca.

No obstante, la teoría de conjuntos dio lugar a principios del siglo XX a una enconada polémica, ya que aparejada a ella se descubrió la aparición de algunos conjuntos paradójicos. Esto condujo, entre otras discusiones, a cuestionar la existencia del conjunto de todos los conjuntos.

En este contexto, fue el matemático Giuseppe Peano quien intentó desarrollar un lenguaje formalizado para fundamentar la aritmética. A él se deben los conocidos axiomas de Peano, que han servido como base a numerosas construcciones en el campo del Álgebra y el Análisis.

Fundamentó sus cinco postulados en tres conceptos: cero, número y la relación ser sucesor de. A pesar de estos esfuerzos, sería Hilbert (uno de los padres del formalismo en matemáticas) quien realmente acabara sistematizando el pensamiento axiomático, aunque Grassmann y Dedekind ya habían dado algunos pasos en esa misma dirección.

Una vez realizada esta axiomatización, pareció haberse logrado una fundamentación definitiva. Sin embargo, en las tres primeras décadas del siglo pasado se abrió una gran crisis de fundamentos en el mundo matemático que afectó a éste en todos sus aspectos. Es aquí donde se sitúan las numerosas controversias y discusiones acerca del concepto de número.

Ninguno de los dos procedimientos para fundamentar la aritmética se mostró como absolutamente satisfactorio y sin fisuras. El sistema axiomático parte del concepto ordinal para intentar desarrollar a continuación la teoría cardinal; de manera opuesta, el sistema conjuntista desarrolla la aritmética cardinal para introducir a continuación el número ordinal. En ambos casos, las justificaciones lógicas parecen en extremo complicadas y enrevesadas, demostrando teoremas que aparecen como evidentes a la intuición.

2. NÚMEROS NATURALES

2.1 Construcción del conjunto N: sistema axiomático

A. Sistema axiomático de Peano

Para definir el conjunto N de los números naturales se puede recurrir a la siguiente construcción; es un conjunto que verifica los axiomas que se enuncian a continuación:

1. Cero es un número natural; es decir, cero pertenece a N.
2. A cada número natural x del conjunto N le corresponde otro número natural único que se llama sucesor o siguiente de x, y que se puede denotar por x*. Es decir, que si x pertenece al conjunto N, entonces x* también pertenece a N.
3. Cero no es el siguiente de ningún otro número natural. Así pues, nunca se puede cumplir que sea x* = 0.
4. Dados dos números naturales distintos, les corresponden siguientes distintos; por tanto, si los siguientes de dos números naturales son iguales, entonces ambos números naturales son iguales.
5. Si un conjunto de números naturales C contiene al elemento cero y también al sucesor de cualquier número natural que pertenezca a C, entonces todo número natural pertenece al conjunto C.

Con respecto a estos axiomas hay que tener en cuenta varias observaciones importantes:

Observación 1 En su formulación original, Peano dio como primer número natural el 1 y no el 0 como aquí aparece.

Observación 2 Aunque se han propuesto otros sistemas axiomáticos parecidos a este, e incluso más simples en determinados aspectos, son menos intuitivos. A partir del sistema de Peano se puede deducir de forma lógica toda la aritmética, aunque no es enteramente satisfactorio.

Observación 3 El primer axioma garantiza que el conjunto N no es vacío; al menos contiene al elemento cero. El segundo de los axiomas ofrece un procedimiento para la construcción del conjunto N, a través del elemento siguiente de cero, que se puede denotar con cualquier símbolo, por ejemplo 0* = ▼. El tercer axioma impide que pudiera ser ▼* = 0. Gracias al axioma cuarto se garantiza que la correspondencia Φ: N→N es una inyección; así, el siguiente de cada número natural no puede ser ninguno de los ya obtenidos anteriormente.

Observación 4 La construcción del conjunto N lleva implícita la implicación de ser un conjunto con un número infinito de elementos. El axioma quinto, también conocido como axioma de recurrencia, da una idea de cómo concebir el conjunto N.

B. El principio de inducción completa y sus consecuencias

Dada una cierta propiedad P referida a un número natural cualquiera, y denotando como P(0), P(1), P(2), P(3)... la sucesión de proposiciones referidas a los números naturales 0, 1, 2, 3... el principio de inducción completa es el siguiente:

Suponiendo que la proposición P(0) es cierta, y suponiendo que de la validez de la proposición P(n) se puede deducir (a través de algún determinado razonamiento) la validez de la proposición P(n + 1): entonces son ciertas todas las proposiciones de la sucesión y se puede probar así la validez de la propiedad general P.

Hay muchos matemáticos que consideran que el primer elemento del conjunto N es el 1, no el 0. En

tal caso, el principio anterior puede enunciarse de forma análoga. Una manera muy intuitiva para comprender lo que dice este principio es la analogía con infinitas fichas de dominó colocadas en fila una detrás de otra.

El principio de inducción completa de una forma gráfica.

Si tenemos la seguridad de que las fichas están colocadas de tal forma que al caer una cualquiera de ellas, entonces hace caer a la siguiente, y también nos aseguramos de que la primera ficha cae, entonces concluimos que de manera irremisible todas las fichas colocadas en la fila caerán.

En el principio de inducción se van a apoyar las llamadas definiciones por recurrencia.

Las consecuencias que se pueden deducir del principio de inducción son principalmente las siguientes:

1. Teorema: todo elemento de N es distinto de su siguiente. Es decir, $x \neq x^*$, para cualquier elemento x del conjunto N.

Demostración: considerando el conjunto $C = \{x \in N / x \neq x^*\}$, el tercer axioma de Peano asegura que 0 pertenece a C; además, si un cierto y pertenece a C, entonces debe cumplir que $y \neq y^*$. Como la correspondencia "ser siguiente de" es inyectiva, se tiene que $y^* \neq (y^*)^*$, por lo cual y^* debe pertenecer al conjunto C. Por tanto, aplicando el principio de inducción completa, debe ser C =N.

2. Teorema: todo elemento del conjunto N, a excepción del 0, es el siguiente de algún número natural. Es decir, que dado cualquier número natural $n \neq 0$, siempre existe otro número natural m tal que $m^* = n$.

Demostración: para demostrar este teorema construiremos el conjunto $C = \{0\} \cup \{x \in N(+)/\text{existe y natural con } y^* = x\}$, siendo N(+) el conjunto $N - \{0\}$. Es evidente que $0 \in C$; de igual modo, si $k \in C$ entonces es obvio que $k^* \in C$. Concluimos entonces que C = N, y por tanto se observa que dado un número natural cualquiera éste debe ser cero o debe ser el siguiente de otro.

Este segundo teorema permite asegurar que la correspondencia que asigna a cada número natural su siguiente es no sólo inyectiva, sino también suprayectiva.

Además, y como consecuencia de ello, se obtiene como corolario que dicha correspondencia es biyectiva o biunívoca. Asimismo, la recíproca de tal correspondencia da la noción de precedente; se define el precedente de un cierto número natural $x \in N(+)$ como aquel número natural y tal que $y^* = x$.

C. Operaciones básicas en el conjunto N: suma y producto de números naturales

a) Suma de números naturales

La definición de la operación suma en el conjunto de los números naturales se propone a través de una recurrencia. A un par de números naturales m y n se les asocia otro número natural, que llamaremos suma de m y n y que se denota por m + n, definido por recurrencia del siguiente modo:

- $m + 0 = m$.
- Si se supone que m + n está definido, entonces se define $m + n^* = (m + n)^*$.

Esta operación así definida posee ciertas propiedades que enunciaremos a continuación.

Propiedad 1 La suma de números naturales está bien definida. Es decir, que dados dos números naturales m y n, entonces la suma m + n también pertenece al conjunto N. Por tanto, el conjunto de los números naturales es cerrado con respecto a la operación suma. Además, dicha operación es única.

Propiedad 2 La suma de números naturales es una operación asociativa, es decir que para cualesquiera m, n y p números naturales se cumple que $(m + n) + p = m + (n + p)$. Se desprende de estas dos primeras propiedades que (N,+) es un semigrupo aditivo.

Propiedad 3 La suma de números naturales es una operación que posee elemento neutro. Esto es, existe un elemento de N (dicho elemento es el cero) que verifica que $m + 0 = 0 + m = m$, para todo elemento m del conjunto N.

Propiedad 4 La suma de números naturales es una operación conmutativa. Quiere esto decir, que dados dos números naturales m y n se verifica que $m + n = n + m$.

Vamos a demostrar esta propiedad, dada su gran importancia, recurriendo al principio de inducción:

Dado el número natural m, aplicaremos el principio de inducción respecto a n.

- Para $n = 0$ el resultado es cierto, ya que por la Propiedad 3 el elemento 0 es el neutro y entonces es conmutativo con cualquier otro elemento m.
- Ahora se va a probar la propiedad para $n = 0^* = 1$, es decir, que $m + 1 = 1 + m$. Esta relación es cierta para $m = 0$, ya que es el elemento neutro. Supongamos por tanto que la relación es cierta para m y probémosla entonces para m^*: suponiendo que se denota $m^* = m + 1$, entonces será $m^* + 1 = (m + 1) + 1$ y por hipótesis de recurrencia se tiene que $(m + 1) + 1 = (1 + m) + 1 = 1 + (m + 1)$ por la Propiedad 2 (asociativa), y entonces se obtiene $1 + (m + 1) = 1 + m^*$. Así pues, esta relación queda comprobada.
- Por último, para terminar de demostrar la veracidad de la propiedad conmutativa, vamos a suponerla cierta para n y comprobaremos que entonces es cierta para n^*:

  $m + n^* = m + (n + 1) = (m + n) + 1$, por la propiedad asociativa.

Ahora, por la hipótesis de recurrencia, será $(m + n) + 1 = (n + m) + 1$; y nuevamente por asociatividad, se tiene que $(n + m) + 1 = n + (m + 1)$.

Como consecuencia de lo probado anteriormente, se tendrá que $n + (m + 1) = n + (1 + m)$.

Finalmente, la propiedad asociativa permite concluir que $n + (1 + m) = (n + 1) + m = n^* + m$, y por tanto se demuestra así esta Propiedad 4.

Estas cuatro propiedades que verifican la operación suma tienen como consecuencia que la estructura de (N,*) sea la de un semigrupo abeliano con elemento neutro.

Propiedad 5 A excepción del cero, ningún elemento del conjunto N tiene elemento simétrico. Es decir, si se tiene que $m + n = 0$, entonces deben ser $m = n = 0$.

Propiedad 6 Simplificación o cancelación de elementos. Si se tiene $m + n = p + n$, entonces es $m = p$. Como consecuencia se extrae que todos los números naturales son regulares para la operación suma.

b) Producto de números naturales

Esta operación también se definirá a partir de una recurrencia, de la siguiente manera: dados dos números naturales m y n, asociado a ellos se encuentra otro número natural llamado producto de m y n denotado como $m \cdot n$ (aunque en general se suele escribir simplemente mn) definido como sigue:

- $m \cdot 0 = 0$.
- Si se supone definido $m \cdot n$, entonces se define $m \cdot n^* = m \cdot n + m$.

Del mismo modo que la suma, esta operación producto cumple una serie de propiedades que la hacen característica, y que son las siguientes:

Propiedad 1 El producto de números naturales está bien definido. Es decir, que dados dos números naturales m y n, entonces el producto mn también pertenece al conjunto de los números naturales. Por tanto, el conjunto N es cerrado con respecto a esta operación, que además es única.

Propiedad 2 La operación producto es distributiva respecto de la operación suma. Esto se traduce en que dados m, n y p números naturales, entonces se cumple que $m(n + p) = mn + mp$ y también que $(m + n)p = mp + np$.

Propiedad 3 El producto de números naturales posee la propiedad asociativa, lo cual significa que dados m, n y p números naturales, entonces se cumple que $(mn)p = m(np)$.

Propiedad 4 El producto de números naturales posee la propiedad conmutativa. Esto es, que dados dos números naturales m y n entonces se cumple que $mn = nm$.

Propiedad 5 Existe un elemento del conjunto N (que es el elemento 1) que cumple que $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$, cualquiera que sea el número natural m. Dicho elemento recibe el nombre de elemento neutro para el producto de números naturales.

Las propiedades anteriores justifican que la estructura de $(N,\cdot)$ sea la de semigrupo abeliano con elemento neutro. Además, como consecuencia se tiene que $(N,+,\cdot)$ es un semianillo abeliano.

Propiedad 6 El conjunto N no tiene divisores de cero, es decir, si $mn = 0$ entonces $m = 0$ o $n = 0$.

Propiedad 7 Simplificación o cancelación de elementos: si se tiene un número natural $n \neq 0$ y se cumple que $nm = np$, entonces es $m = p$. Por tanto, todo número natural (a excepción del cero) es regular con respecto a la operación producto.

Propiedad 8 A excepción del número natural 1, ningún otro número natural tiene elemento simétrico. Es decir, que si $mn = 1$, entonces deben ser $m = n = 1$.

D. Ordenación en el conjunto N

a) Definición y propiedades

Dados dos números naturales m y n, se dice que m es menor o igual que n (y se denota por $m \leq n$) si existe un número natural p tal que $m + p = n$. También se puede decir en ese caso que n es mayor o igual que m, y se denota por $n \geq m$.

Esta relación entre los elementos que conforman el conjunto de los números naturales cumple las siguientes propiedades:

Propiedad 1 La relación entre dichos elementos es única. Si existieran dos elementos p y p' tales que $m + p = n$ y $m + p' = n$ entonces sería $m + p = m + p'$, y como todo número natural es regular, entonces debe ser $p = p'$.

Propiedad 2 La relación tiene la propiedad reflexiva: todo elemento m del conjunto N cumple que $m \leq m$.

Propiedad 3 La relación verifica la propiedad antisimétrica, es decir, que dados dos números naturales m y n que cumplan que $m \leq n$ y que $n \leq m$, entonces es $m = n$.

Propiedad 4 La relación cumple la propiedad transitiva, o sea que dados tres números naturales m, n y p que cumplan que $m \leq n$ y que $n \leq p$, entonces $m \leq p$.

Propiedad 5 la relación posee la propiedad de conexión. Para cualesquiera dos elementos m y n del conjunto N, se cumple siempre que $m \leq n$ o que $n \leq m$.

Estas propiedades confieren a $(N,\leq)$ la calificación de conjunto totalmente ordenado, ya que la relación $\leq$ es de orden total.

b) Compatibilidad entre la relación de orden y las operaciones con números naturales

La relación de orden anteriormente descrita da lugar a dos leyes con respecto a las operaciones suma y producto de números naturales, una para cada operación.

- Monotonía con respecto a la suma: dados tres números naturales m, n y p, entonces $m \leq n$ si, y sólo si, $m + p \leq n + p$.

  Consecuentemente, en una desigualdad se puede sumar miembro a miembro. Es decir, que si $m \leq n$ y también $p \leq q$, entonces $m + p \leq n + q$.

- Monotonía con respecto al producto: dados tres números naturales m, n y p, si $m \leq n$ entonces $mp \leq np$. Si se tiene $p \neq 0$, entonces también se va a cumplir la implicación recíproca.

Así pues, la relación binaria $\leq$ es compatible con las operaciones suma y producto, y como consecuencia de ello se obtiene el siguiente resultado:

$(N,+,\cdot,\leq)$ es un semianillo abeliano totalmente ordenado.

c) La relación de orden estricto

Dados dos números naturales m y n, si existe otro número natural $x \neq 0$ tal que $m + x = n$, entonces se

dice que m es estrictamente menor que n (denotado por $m < n$) o que n es estrictamente mayor que m (y se denota por $n > m$).

Esta nueva relación de orden presenta las siguientes propiedades:

Propiedad 1 Posee la propiedad antirreflexiva, es decir que dado cualquier número natural m, nunca puede ser $m < m$.

Propiedad 2 Posee la propiedad transitiva. Por tanto, dados tres números naturales m, n y p tales que $m < n$ y $n < p$, entonces será $m < p$.

Propiedad 3 Dados dos números naturales m y n, si $m < n$ entonces $m \neq n$.

Propiedad 4 Dados dos números naturales m y n, se debe cumplir una, y sólo una, de las relaciones siguientes: $m < n$, $m = n$, $m > n$. Esta propiedad se conoce como la propiedad de tricotomía.

E. Características del conjunto N

a) Elementos consecutivos

Dados dos números naturales m y n, si suponemos que $m < n$, entonces se dice que m es anterior a n o que n es posterior a m. En el caso de que no exista ningún número natural que sea, a la vez, posterior a m y anterior a n, se dice que m y n son números naturales consecutivos. Esta relación suele expresarse diciendo que n es el siguiente de m.

Es decir, que m y n son consecutivos si no existe ningún número natural x tal que $m < x < n$.

Hay que observar que este nuevo concepto de siguiente es totalmente coherente con el que se dio en los axiomas; se prueba fácilmente que no existe ningún número natural x tal que sea $n < x < n + 1$.

b) Secciones de N y conjuntos finitos

Una sección de N se define como un intervalo de la forma $[1,n] = \{x \in N / 1 \leq x \leq n\}$.

A través de este concepto se define a su vez otro objeto matemático: el conjunto finito. Dado un conjunto C, se dice que es finito si existe una biyección entre dicho conjunto C y una sección de N.

C es un conjunto finito si, y sólo si, existe $\varphi: C \rightarrow [1,n]$ tal que φ es biyectiva.

Es importante observar que el orden total del conjunto N induce a su vez un orden total en todo conjunto finito C. Esto dará lugar a las llamadas sucesiones finitas.

c) Primer elemento y último elemento. El principio de buena ordenación

En todo conjunto ordenado C pueden definirse de forma general un primer y un último elemento. Como primer elemento se toma aquel que es anterior a todos los demás (se le suele llamar también mínimo de C). Del mismo modo, se toma como último elemento del conjunto C a aquel que es posterior a todos los demás (y se le llama máximo de C). Si existen el máximo y el mínimo de un cierto conjunto ordenado C, entonces son únicos.

Se dice que un conjunto C está bien ordenado si todo subconjunto suyo tiene un primer elemento.

En relación a las anteriores definiciones, emanan unas ciertas propiedades del conjunto N que se enuncian a continuación:

Propiedad 1 El conjunto N tiene primer elemento (es el cero), pero sin embargo carece de último elemento.

Propiedad 2 Todo subconjunto no vacío de N tiene primer elemento. Por tanto, el conjunto N es un conjunto bien ordenado. En algunas ocasiones, esta propiedad se toma como un axioma (se suele llamar principio de buena ordenación) que sustituye al principio de inducción completa.

Propiedad 3 Cualquier parte finita del conjunto N posee un primer elemento y también un último elemento.

Propiedad 4 Si se tiene una parte de N (no vacía) que tiene un último elemento, entonces esa parte debe ser un conjunto finito.

Propiedad 5 Para que una parte no vacía del conjunto N tenga un último elemento, es necesario y suficiente que esa parte sea finita.

Propiedad 6 Cualquier parte infinita de N carece de último elemento.

Propiedad 7 Cualquier parte infinita de N admite siempre un primer elemento.

Demostremos esta propiedad: sea C una parte infinita del conjunto N, y sea 'a' un elemento cualquiera de C; si en C no hay elementos inferiores a 'a', entonces 'a' es el primer elemento de C. Si ocurre lo contrario, entonces los elementos inferiores a 'a' están en el intervalo [0,a], de modo que se puede construir el conjunto D definido como la intersección de C con el intervalo [0,a]. Se observa que este conjunto D es no vacío, ya que al menos contiene al elemento 'a'; además, es un conjunto finito por estar

incluido en el intervalo [0,a]. Por tanto, este conjunto D tiene un primer elemento, que será el primer elemento de C.

2.2 Construcción del conjunto N: sistema conjuntista

El conjunto N construido a través de la teoría de conjuntos tiene la ventaja de que su visión es más intuitiva que la que se obtiene de la construcción axiomática. Sin embargo, este nuevo camino presenta graves problemas como la noción de finito y la aparición de los conjuntos paradójicos, exigen un tratamiento muy delicado y preciso. No en vano, la crisis de fundamentos de la teoría de conjuntos afectó profundamente a esta rama de las Matemáticas.

A. Conjuntos y paradojas

a) Conjuntos equipotentes

Se dice que dos conjuntos A y B son equipotentes (en ocasiones también se les llama equivalentes o coordinables) si existe una biyección entre ambos conjuntos. Dicha relación se denota por $A \approx B$. Es decir, $A \approx B$ si, y sólo si, existe $\varphi: A \rightarrow B$ tal que φ es biyectiva.

A partir de esta definición se deducen una serie de proposiciones que se dan a continuación:

Proposición 1 Cualquier conjunto es equipotente con sí mismo. Esto es evidente, ya que basta tomar para demostrarlo la aplicación identidad en el propio conjunto.

Proposición 2 Si un conjunto A es equipotente a un conjunto B, entonces el conjunto B es equipotente al conjunto A. En este caso es suficiente tomar la función inversa, que también tiene que ser biyeciva.

Proposición 3 Si un conjunto A es equipotente a un conjunto B, y el conjunto B es equipotente a otro conjunto C, entonces el conjunto A es equipotente al conjunto C. Esto se demuestra tomando simplemente la composición de dos funciones biyectivas, que debe ser a su vez biyectiva.

Proposición 4 Dados cuatro conjuntos A, B, C y D tales que A es equipotente a B y C es equipotente a D, entonces se cumple que:

1. Si las intersecciones de A con C y la de B con D son ambas vacías, entonces $A \cup C$ es equipotente a $B \cup D$.
2. El conjunto $A \times C$ es equipotente al conjunto $B \times D$.

Proposición 5 Sean A y B dos conjuntos cualesquiera; entonces se pueden encontrar dos conjuntos C y D tales que A sea equipotente a C, B sea equipotente a D y además la intersección de los conjuntos C y D sea vacía.

Proposición 6 Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, entonces se cumple uno de los dos enunciados siguientes:

1. A es equipotente con una parte de B.
2. B es equipotente con una parte de A.

En el caso de que se cumplan ambos enunciados se tiene como consecuencia que A es equipotente a B. Esta proposición es muy importante en el contexto que se trata aquí. La parte 1 de la proposición se suele conocer como **Teorema de Zermelo**, y las segunda parte es una especie de anticipación del **Teorema de Cantor-Bernstein**.

b) Paradojas: el conjunto de todos los conjuntos y su problemática

La relación "ser equipotente" esta definida entre unos elementos llamados conjuntos. Ahora bien, surge entonces una pregunta: ¿cuál es el dominio Ψ en el que queda definida esta relación? A primera vista, Ψ

parece que tendría que contener a todos los conjuntos; es decir, sería algo así como el conjunto de todos los conjuntos. Aquí es donde se plantea un grave problema: ¿existe realmente dicho conjunto?

Este tipo de preguntas salen a la luz a finales del siglo XIX. Cantor se percató en 1899 de la contradicción que supone admitir que existe este conjunto: el conjunto de partes de Ψ sería equipotente con una parte de Ψ, lo cual es totalmente contradictorio.

La corriente formalista, en su intento de dar una base axiomática a la teoría de conjuntos, evita este problema y muchos otros haciendo una especie de trampa: no se ocupa de qué objetos es a los que se les puede llamar conjuntos. En algunos casos se hace la distinción entre conjuntos y clases, y se retoma la noción de clase universal... que no es un conjunto.

Los partidarios de la corriente logicista, por su lado, destacan que los llamados conjuntos paradójicos violan el siguiente principio: un elemento cuya definición implica la totalidad de los elementos de un conjunto no puede pertenecer a ese conjunto. De acuerdo con esto, el conjunto de todos los conjuntos es un conjunto paradójico.

En cuanto a la relación "ser equipotente", un análisis más detallado hace pensar que es más adecuado tratarla de otro modo, más bien como una función proposicional que como una verdadera relación binaria.

A través de dos nuevos axiomas, el **axioma de elección** y el **axioma del infinito**, se va a dar un nuevo enfoque que sorteará las posibles paradojas que pudiesen aparecer. Será mediante ellos como llegaremos a conceptos como el de cardinal finito, a partir del cual se constituirá el conjunto que tratamos de estudiar: N.

c) Conjuntos finitos y conjuntos infinitos

Se dice que un conjunto C es finito si no es equipotente con ninguno de sus subconjuntos propios. Si el conjunto C no es finito, entonces se dice que es infinito, y en tal caso existirá un subconjunto propio de C que será equipotente con C.

Como ejemplo de esto, se puede observar que cualquier segmento puede ponerse en aplicación biunívoca con un trozo de sí mismo (basta con realizar una homotecia), y por tanto dicho segmento será un conjunto infinito (se puede ver el segmento como un conjunto de puntos). Sin embargo, esto no puede hacerse con un conjunto como A = {a, b, c, d}, que consecuentemente será considerado un conjunto finito.

En algunos casos, la definición de conjunto finito dada aquí se demuestra como teorema; es el llamado teorema de Dedekind.

B. Cardinales y operaciones

a) Cardinal de un conjunto

A través de la relación "ser equipotente" definida entre los conjuntos, se va a definir un nuevo concepto matemático: el cardinal (o potencia) de un conjunto. El cardinal de un conjunto A, que se denota como Card(A), será siempre el mismo que el de cualquier conjunto equipotente con él. Es decir, que Card(A) = Card(B) si, y sólo si, A es equipotente a B.

El conjunto vacío da lugar a una clase, a la cual se le va a asignar cardinal 0; a la clase de los conjuntos formados por un solo elemento se les asignará cardinal 1.

b) Operaciones con cardinales de conjuntos

Los cardinales de conjuntos permite efectuar entre ellos diversas operaciones que se van a exponer a continuación:

- **Suma de cardinales:** dados dos conjuntos A y B con Card(A) = a y Card(B) = b, se pueden tomar A y B de modo que sean disjuntos (como consecuencia de la quinta proposición dada en el apartado 3.2 A. a)); y entonces se va a definir el cardinal suma como a + b = Card (A ∪ B), siendo A y B disjuntos (es decir, que tienen intersección vacía).

  Se observa que esta definición no depende de los representantes escogidos. Además, es evidente que esta operación tiene la propiedad conmutativa (a + b = b + a), la propiedad asociativa ((a + b) + c = a + (b + c)) y existe un elemento neutro para la suma de cardinales que será el 0.